

SUITES ARITHMETIQUES

1/ EXEMPLE D'INTRODUCTION : placement « avec intérêt simple »

Une banque propose, pour un placement d'un montant de 1500 euros fait le 1^{er} janvier 2003, un taux d'intérêt simple annuel de 5 %. Cela signifie qu'à la fin de chaque année on reçoit un intérêt de $\frac{5}{100} C_0$ où on nomme C_0 le capital initial versé le 1^{er} janvier 2003, C_1 le capital disponible au bout d'un an, C_2 le capital disponible au bout de 2 ans,

- Calculer C_1 , C_2 et C_3 .
- Que représentent C_{n+1} et C_n ?
- Etablir la relation entre C_{n+1} et C_n .
- Etablir la relation entre C_0 et C_n .
- Si on laisse pendant 10 ans le compte sans retirer d'argent alors combien aura-t-on la 10^{ème} année.

2/ COURS :

- Définition** : Une suite arithmétique notée (U_n) où n est un entier naturel est une suite dans laquelle chaque terme sauf le premier (noté U_0) est obtenu en ajoutant au terme précédent un nombre réel non nul r appelé la raison de la suite.

b) **Notation** : (U_n) définie par :

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} U_0 \quad \text{terme initial} \\ U_{n+1} = U_n + r, \end{array} \right. \end{array}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 terme de rang n+1 terme de rang n raison

cette relation s'appelle la relation de récurrence de la suite (U_n) .

pour tout n entier naturel

- Expression du terme U_n en fonction du premier terme et de la raison.**

Théorème : Soit (U_n) une suite arithmétique définie par son terme initial U_0 et sa raison r . Pour tout n entier naturel, on a :

$$U_n = U_0 + n \times r$$

- Application des suites arithmétiques : somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.**

pour n un entier naturel non nul, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

exemple : Calculer la somme des entiers naturels de 1 à 25.

.....

.....

3/ EXERCICES D'APPLICATION :

Dans tout l'exercice (U_n) désigne une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

- $U_0 = -6$ et $r = 4$. Calculer U_7 et U_{20} .
- $U_0 = 2$ et $U_{13} = 67$. Calculer r .
- $U_5 = 3$ et $U_{15} = -27$. Calculer r et U_0 .
- $U_{22} = 15$ et $r = \frac{3}{4}$. Expliciter le terme général U_n .

SUITES GEOMETRIQUES

1/ EXEMPLE D'INTRODUCTION : placement « avec intérêt composé »

Une banque propose, pour un placement d'un montant de 1500 euros fait le 1^{er} janvier 2003, un taux d'intérêt composé annuel de 5 %. Cela signifie qu'à la fin de chaque année la somme en banque augmente de 5%. On nomme C_0 le capital initial versé le 1^{er} janvier 2003, C_1 le capital disponible au bout d'un an, C_2 le capital disponible au bout de 2 ans,

- Calculer C_1 , C_2 et C_3 .
- Que représentent C_{n+1} et C_n ?
- Etablir la relation entre C_{n+1} et C_n .
- Etablir la relation entre C_0 et C_n .
- Si on laisse pendant 10 ans le compte sans retirer d'argent alors combien aura-t-on la 10^{ème} année.

2/ COURS :

- Définition** : Une suite géométrique notée (U_n) où n est un entier naturel est une suite dans laquelle chaque terme sauf le premier (noté U_0) est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre réel non nul ρ appelé la raison de la suite.

- Notation** : (U_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 \text{ terme initial} \\ U_{n+1} = U_n \times \rho, \end{array} \right.$$

cette relation s'appelle la relation
de récurrence de la suite (U_n) .

pour tout n entier naturel

$\uparrow$
terme de rang $n+1$

$\uparrow$
terme de rang n

$\uparrow$
raison

- Expression du terme U_n en fonction du premier terme et de la raison.**

Théorème : Soit (U_n) une suite géométrique définie par son terme initial U_0 et sa raison ρ .
Pour tout n entier naturel, on a :

$$U_n = U_0 \times \rho^n$$

- Application des suites géométriques : somme des $(n+1)$ premières puissances d'un nombre réel ρ non nul.**

$$\text{pour } \rho \neq 1, \text{ on a : } 1 + \rho^1 + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^n = (1 - \rho^{n+1}) / (1 - \rho)$$

exemple : Calculer la somme des 5 premières puissances de $\frac{1}{3}$.

3/ EXERCICES D'APPLICATION :

Dans tout l'exercice (U_n) désigne une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison ρ .

- $U_0 = -6$ et $\rho = 4$. Calculer U_7 et U_{20} .
- $U_0 = 4$ et $U_3 = 32$. Calculer ρ .

4/ EXTRAITS D'EXERCICES TYPE BAC :

- (bac F2-F3 1994)
Soit (U_n) la suite définie par $2n - 1$ pour tout n entier naturel.
Démontrer que la suite (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- (bac H 1989)
L'unité d'intensité du son utilisée est le décibel (symbole dB).
Une source sonore émet un son d'intensité 100 dB.
On appelle U_n (n entier naturel) l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.
1 - Calculer U_1 , U_2 , U_3 .
2 - Déterminer la relation entre U_{n+1} et U_n , puis exprimer U_n en fonction de U_0 et de n .