Équations de droites

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1/ Équation

Une **équation** d'une courbe est une relation que vérifient les coordonnées de tous les points qui appartiennent à cette courbe.

Exemples

$(C_1) : 2x^2 + y^2 = 6$; $(C_2) : 3x + 4y - 7 = 0$; $(C_3) : \frac{1}{x^2+1} = 2y$ sont des équations de courbes.

$A(1 ; -2) \in (C_1)$ car $2 \times \mathbf{1}^2 + (\mathbf{-2})^2 = 6$ mais $B(3 ; 0) \notin (C_1)$ car $2 \times \mathbf{3}^2 + \mathbf{0}^2 = 18 \neq 6$.
$C(5 ; -2) \in (C_2)$ car $3 \times \mathbf{5} + 4 \times (\mathbf{-2}) - 7 = 0$ mais $D(2 ; 1) \notin (C_2)$ car $3 \times \mathbf{2} + 4 \times \mathbf{1} - 7 = 3 \neq 0$.

2/ Équations de droites

a) Propriétés – Vocabulaire

Toute droite du plan a une équation de la forme $x = c$ (si elle est parallèle à l'axe des ordonnées) ou de la forme $y = ax + b$.
a est le **coefficient directeur** de la droite et b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Une équation de la forme $y = ax + b$ s'appelle équation réduite de la droite.

Exemples

$(d_1) : y = \frac{2}{3}x - 3$; $(d_2) : x = -2$; $(d_3) : y = -2x + 5$; $(d_4) : y = 3$ sont des équations de droites.

Le coefficient directeur de (d_1) est $\frac{2}{3}$ et son ordonnée à l'origine est -3.

(d_2) n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.
Le coefficient directeur de (d_3) est -2 et son ordonnée à l'origine est 5.
Le coefficient directeur de (d_1) est 0 et son ordonnée à l'origine est 3.

Plus généralement, toute équation de droite peut se mettre sous la forme $ax + by + c = 0$ où a et b ne sont pas nuls simultanément. Cette forme est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Exemples

$y = \frac{2}{3}x - 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 1y - 3 = 0$ $\qquad x = -2 \Leftrightarrow 1x + 0y + 2 = 0$

b) Tracer une droite d'équation donnée

Deux points suffisent pour tracer une droite. Il suffit donc, pour tracer une droite, de déterminer les coordonnées de deux points de la droite.

Exemples

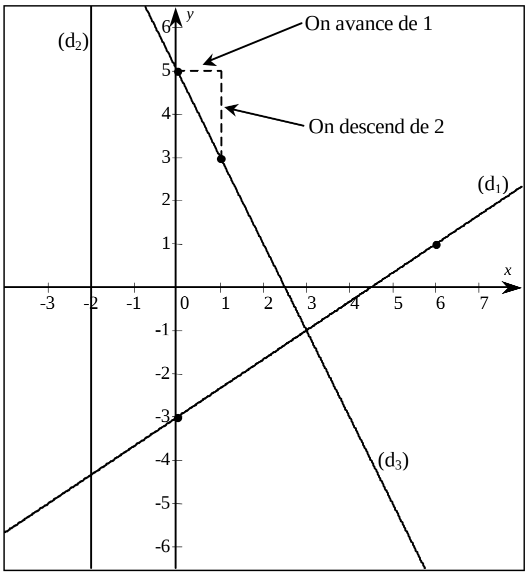
① Tracer la droite $(d_1) : y = \frac{2}{3}x - 3$

On trouve deux points de (d_1) en choisissant deux valeurs de x et en calculant les valeurs de y correspondantes :

x	0	6
$\frac{2}{3}x - 3$	-3	1

② Tracer la droite $(d_2) : x = -2$
Tous les points d'abscisse -2 sont sur la droite.

③ Tracer la droite $(d_3) : y = -2x + 5$
On trouve deux points de (d_3) en utilisant le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :
L'ordonnée à l'origine est 5 dont le point (0; 5) appartient à (d_3).
Si on « avance » de 1 en abscisses et si on « descend » de 2 en ordonnées, on obtient un autre point de la droite. On peut alors tracer la droite (d_3).



c) Déterminer l'équation d'une droite

Si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ appartiennent à une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées alors le coefficient directeur de d se calcule à l'aide de la formule suivante : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) avec A(–2 ; 9) et B(1 ; –3).
① L'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{-3-9}{1-(-2)} = \dfrac{-12}{3} = -4$.
L'équation de (AB) est donc de la forme $y = -4x + b$.
② A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation : $\boldsymbol{9} = -4 \times (\boldsymbol{-2}) + b$ donc $9 = 8 + b$ soit $b = 1$
L'équation réduite de (AB) est donc $y = -4x + 1$.

3/ Droites parallèles, perpendiculaires

a) Vecteur directeur

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d un vecteur qui a la même direction que d.

Exemples
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) précédente.
Pour toute droite (AB), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).

Si d a pour équation : $y = ax + b$ alors $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Si d a pour équation $x = c$ alors $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Si d a pour équation : $ax + by + c = 0$ alors $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Exemples
Le vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) précédente.
Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_3) précédente.

b) Droites parallèles

Deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ sont **parallèles** si et seulement si $\boldsymbol{a = c}$.
Deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $dx + ey + f = 0$ sont **parallèles** si et seulement si $\boldsymbol{ae - bd = 0}$.

En effet, dans le second cas un vecteur directeur de la première droite est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la deuxième droite est $\vec{v}\begin{pmatrix}-e\\d\end{pmatrix}$.
Les droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs sont colinéaires c'est-à-dire si leur déterminant est nul.
$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = -b \times d - a \times (-e) = -bd + ae = ae - bd$.
Les droites sont donc parallèles si et seulement si $ae - bd = 0$.

c) Droites perpendiculaires

On suppose que le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est orthonormal.

Deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ sont **perpendiculaires** si et seulement si $\boldsymbol{ac = -1}$.