

# Propriétés des fonctions

## Sens de variation d'une fonction

### Exercice 1 : Rappels

- 1/ Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-2 ; 5]$  vérifiant les conditions suivantes :  
 $f$  est croissante sur  $[-2 ; 2]$  et décroissante sur  $[2 ; 5]$ .  
 $f(-2) = -3 ; f(2) = 4$  et  $f(5) = 1$ .
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
  - Tracer une représentation graphique possible pour  $f$ .
  - Comparer  $f(-1,5)$  et  $f(0)$ . Comparer  $f(2,3)$  et  $f(4,5)$ .

2/ Plus généralement :

Soit  $f$  une fonction **croissante** sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$   
Si  $a < b$  alors .....

Soit  $f$  une fonction **décroissante** sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  appartenant à  $I$   
Si  $a < b$  alors .....

### Exercice 2 : Étude d'une fonction affine

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2x + 5$ .

- Quel est le sens de variation de  $f$ . Justifier
- L'objet de cette question est de démontrer ce qui précède.
  - On considère deux nombres réels  $a$  et  $b$ .  
Démontrer que  $f(a) - f(b) = 2(b - a)$
  - On suppose que  $a < b$ .  
Que peut-on dire de  $b - a$  ? de  $2(b - a)$  ? de  $f(a) - f(b)$  ?
  - Recopier et compléter :  
Si  $a < b$  alors  $f(a)$  .....  $f(b)$ .
  - Conclure.

### Exercice 3 : Étude de la fonction « carré »

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2$ . On veut déterminer les variations de  $g$ .

- On considère deux nombres réels  $a$  et  $b$ .  
Calculer et factoriser  $g(a) - g(b)$ .
- a) On suppose que  $0 \leq a < b$ .  
Que peut-on dire de  $a - b$  ? de  $a + b$  ? de  $g(a) - g(b)$  ?  
b) Quel est le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$  ?

3/ a) On suppose que  $a < b \leq 0$ .

Que peut-on dire de  $a - b$  ? de  $a + b$  ? de  $g(a) - g(b)$  ?

b) Quel est le sens de variation de  $g$  sur  $]-\infty ; 0]$  ?

4/ Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .

### Exercice 4 : Étude d'une fonction polynôme du second degré

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -x^2 + 4x - 6$ .

1/ On considère deux nombres réels  $a$  et  $b$ .

Démontrer que  $h(a) - h(b) = (b - a)(b + a - 4)$ .

2/ On suppose que  $a < b \leq 2$ .

Déterminer le signe de  $h(a) - h(b)$ . En déduire le sens de variation de  $h$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 2]$ .

3/ On suppose que  $2 \leq a < b$ .

Déterminer le signe de  $h(a) - h(b)$ . En déduire le sens de variation de  $h$  sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ .

4/ Dresser le tableau de variation de la fonction  $h$ .

### Exercice 5 : Étude d'une fonction rationnelle 1

Soit  $r$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{3\}$  par  $r(x) = \frac{5}{x-3}$

- En utilisant la méthode vue précédemment déterminer le sens de variation de  $r$  sur  $]3 ; +\infty[$  puis sur  $]-\infty ; 3[$ .
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $r$ .

### Exercice 6 : Étude d'une fonction rationnelle 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

On veut déterminer les variations de  $f$ .

- Représenter cette fonction sur l'écran d la calculatrice et faire une conjecture quant aux variations.
- Appliquer la méthode vue précédemment pour vérifier cette conjecture.