Exercices sur la notion de fonction

Exercice 1 : Dans cet exercice, $f(x)$ est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

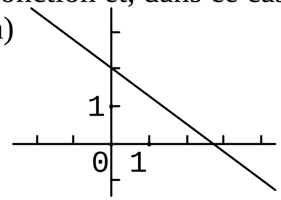
d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

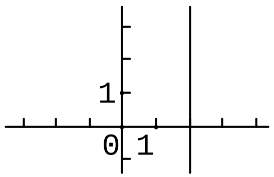
g) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

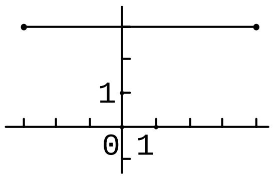
Exercice 2 : Pour chaque fonction de l'exercice précédent, déterminer lorsque c'est possible les images des nombres suivants :

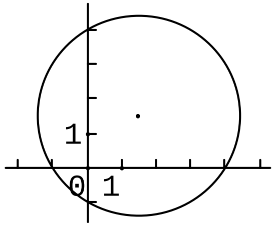
0 ; 1 ; $\dfrac{1}{2}$; $-\sqrt{2}$; -4

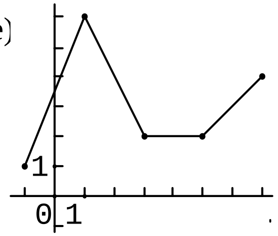
Exercice 3 : Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction et, dans ce cas, préciser son ensemble de définition.

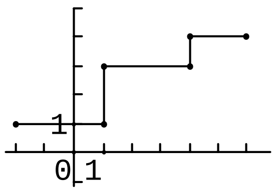
a)


b)


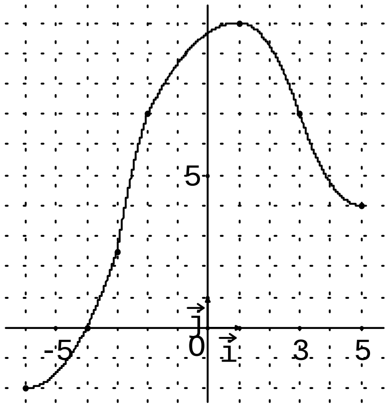
c)


d)


e)


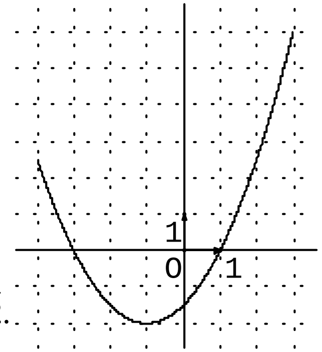
f)


Exercice 4 : Soit f la fonction représentée ci-contre.



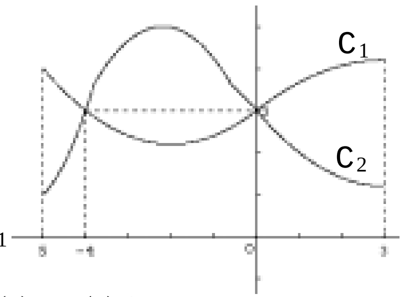
1. Donner l'ensemble de définition.
2. a) Lire l'image de 3 par f ; $f(1)$; $f(-4)$; $f(-2)$ et $f(5)$.
   b) Lire les antécédents de 7 par f.
   c) Lire les antécédents de 0 par f.

Exercice 5 : La courbe C ci-contre représente dans ce repère une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = 0,5(x+1)^2 - 2$.



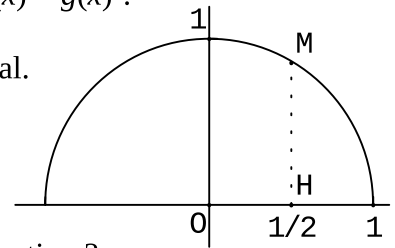
1. A l'aide du graphique, dire si chacun des points suivants appartient ou non à la courbe C :
A(0 ; -1,5) ; B(1 ; 0) ; C(2 ; 2) ; D(-3 ; 0) ; E(1,5 ; 1) ; F(-1 ; -2)
2. Déterminer par le calcul l'image de 0, de -1 et de $\sqrt{2}$. Retrouver les résultats sur la courbe.
3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0, -3 et -2. Retrouver les résultats sur la courbe.

Exercice 6 : Deux fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-5 ; 3]$. C_1 est la courbe représentative de f et C_2 celle de g.



Résoudre graphiquement chacune des questions suivantes.
1. Quel est l'ensemble des réels x pour lesquels C_1 est au-dessus de C_2 ?
2. Quels sont les réels pour lesquels $f(x) = g(x)$? $f(x) = g(x)$?

Exercice 7 : $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal.
C est le demi-cercle de centre O et de rayon 1.



1. a) La courbe C est-elle la représentation graphique d'une fonction f ?
   b) Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

2. M est le point du demi-cercle C d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Calculer l'ordonnée de M.

   En déduire $f(\dfrac{1}{2})$.

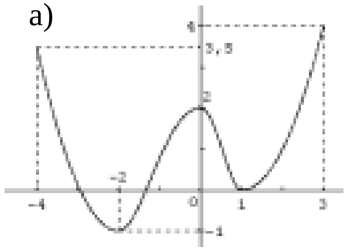
3. De la même manière, calculer : $f(-\dfrac{1}{2})$; $f(\dfrac{2}{5})$; $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$; $f(0)$.

4. Trouver les réels x de l'intervalle $[-1 ; 1]$ qui ont pour image par f : 0 ; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

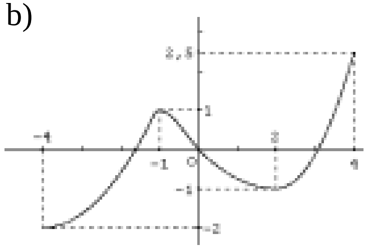
5. x est un réel de l'intervalle $[-1 ; 1]$ et M le point de C d'abscisse x. Calculer l'ordonnée de M en fonction de x. En déduire l'expression de $f(x)$.

<u>Exercice 8 :</u> Dans chacun des cas, la fonction est donnée par sa courbe. Dresser son tableau de variation.

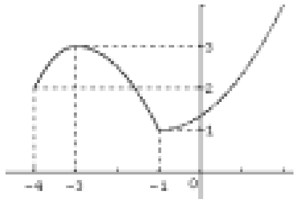
a)



b)



c)



<u>Exercice 9 :</u> Dans les deux cas suivants, tracer une courbe susceptible de représenter f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $f(-4) = -3$; $f(1) = 3$: $f(4) = 2$.
Pour tout $x>2$, $f(x)>0$.

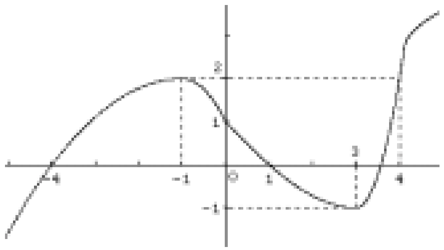
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f		↗	4	↘	1	↗	4	↘	

b) $D_f = \mathbb{R}$; $f(-1) = 0$; $f(-3) = 2$.
Pour tout $x<-3$, $f(x) <3$.

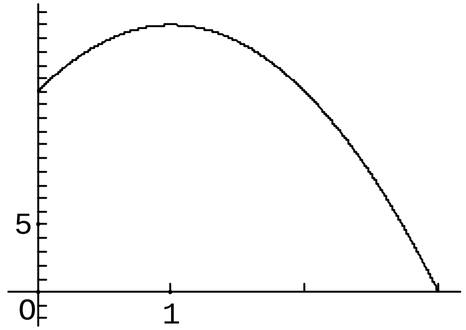
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f		↘	-2	↗	3	→	

<u>Exercice 10 :</u> La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. on précise de plus que $f(3,5) = 0$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.
   En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.



<u>Exercice 11 :</u> La trajectoire d'une balle de jeu est donné par : $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec $x \in [0 ; 3]$, et $f(x)$ est la hauteur de la balle au dessus du sol, exprimée en mètres.

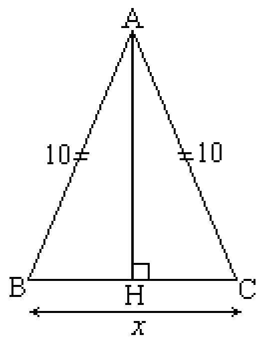


1. Interpréter $f(0)$ et $f(3)$.
2. a) D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?
   b) Donner les instants où la hauteur est égale à 15 m.
   c) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 18$. En donner une interprétation concrète.

<u>Exercice 12 :</u> f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (x + 1)^2$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que pour tout réel, $f(x) \geq -2$?
2. Avant d'affirmer que -2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, il faut démontrer que $f(x)$ prend effectivement la valeur -2. Le démontrer et conclure.

<u>Exercice 13 :</u> ABC est un triangle isocèle en A avec : AB = AC = 10 cm.
H est le pied de la hauteur issue de A.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle lorsqu'on fait varier la longueur x (en cm) du côté [BC].



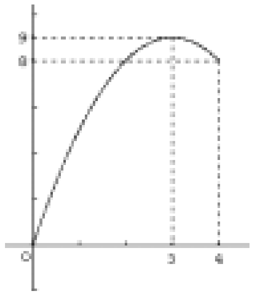
1. a) Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC lorsque $x = 5$, puis lorsque $x = 10$.
b) Peut-on avoir $x = 30$? Pourquoi ? Dans quel intervalle varie x ?
2. a) Exprimer AH en fonction de x.
   b) On désigne par $f(x)$ l'aire de ABC. Démontrer que : $f(x) = \dfrac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.
   c) Calculer $f(x)$ pour chacune des valeurs entières de x prises dans [0 ; 20] : arrondir les résultats au dixième et les présenter dans un tableau.
   d) Dans un repère orthogonal bien choisi, placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ du tableau précédent. Donner alors l'allure de la courbe représentant f.

<u>Exercice 14 :</u> ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x.
La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1. a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.
   b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.
2. On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle [0 ; 4].
   a) Montrer que $f(x) = x(6 - x)$ et vérifier que $f(x) = 9 - (x - 3)^2$.
   b) Compléter le tableau suivant :

longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, $f(x)$						

3. Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle [0 ; 4].
   Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :



   a) Lorsque AM = $\dfrac{1}{4}$ AD, quelle est l'aire de AMNP ?
   b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?
   c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm² ?
   d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\dfrac{17}{2}$ cm².
4. Répondre aux questions suivantes en choisissant pour $f(x)$ l'expression la mieux adaptée.
   a) Démontrer que $f(x) \leq 9$.
      Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximale lorsque $x = 3$? Quelle est la nature de AMNP lorsque $x = 3$?
   b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\dfrac{17}{2}$ cm² lorsque

   $x = \dfrac{6 - \sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{6 + \sqrt{2}}{2}$.