

I LES ENSEMBLES DE NOMBRES.

1. N, l'ensemble des entiers naturels.

Rappel de notations : $N = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n ; \dots\}$, $N^* = N \setminus \{0\}$ (N privé de 0).

Remarque : La soustraction et la division ne sont pas toujours possibles dans N, en effet :

- ✓ Si $a \in N$ et $b \in N$ alors $(a-b) \in N$ seulement si $a \geq b$.
- ✓ Si $a \in N$ et $b \in N^*$ alors $\frac{a}{b} \in N$ seulement si a est un multiple de b.

Exemples :

- ✓ $8-5=3$, $3 \in N$ et on a bien $8 \geq 5$.
- ✓ $5-8=-3$, $-3 \notin N$ et $5 \leq 8$.
- ✓ $\frac{12}{3} = 4$, $4 \in N$ possible car $12=4 \times 3$.
- ✓ On ne peut diviser 2 par 5 dans N car $\frac{2}{5} \notin N$.

2. Z, l'ensemble des entiers relatifs.

Rappel de notations : $Z = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$; $Z^* = Z \setminus \{0\}$ (Z privé de 0) ;
 $Z^+ = N = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n ; \dots\}$; $Z^- = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0\} =$ « l'ensemble des entiers négatifs ».

Propriété :

Tout élément x de Z admet dans Z un opposé noté $-x$ (par exemple 2 a pour opposé -2 ; -5 a pour opposé 5). Cette propriété distingue Z de N, elle a pour conséquence que la soustraction de deux entiers relatifs x et y est toujours possible dans Z.

Remarque : La division d'un entier relatif a par un entier relatif non nul b n'est possible dans Z que si a est un multiple de b.

3. Q, l'ensemble des rationnels.

Définition : On appelle **nombre rationnel** tout nombre que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un nombre entier non nul.

Ainsi $\frac{8}{3}$ et $-\frac{4}{5}$ sont des nombres rationnels, mais aussi tous les décimaux et tous les nombres entiers,

en effet $1,31 = \frac{131}{100}$, $-2 = \frac{-2}{1}$, $25 = \frac{25}{1}$.

Notation : Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

Remarque : Un nombre rationnel peut s'écrire d'une infinité de façons sous forme de quotients

d'entiers (exemple : $-\frac{3}{5} = \frac{3}{-5} = \frac{-6}{10} = \dots = \frac{-3k}{5k}$, $k \in Z^*$).

Propriétés :

i. Tout nombre rationnel non nul a admet un inverse noté $\frac{1}{a}$.

ii. Quels que soient $a \in Q$ et $b \in Q^*$, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

iii. Calculs sous forme de quotients :

Dans le tableau suivant, a et c sont des nombres rationnels quelconques, b et d des nombres rationnels non nuls.

$$a = \frac{a}{1}$$

$$-\frac{1}{b} = \frac{1}{-b} = \frac{-1}{b}$$

$$\frac{0}{b} = 0$$

$$\frac{b}{b} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{a}, \text{ avec } a \neq 0$$

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ si et seulement si } a = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad - bc = 0$$

4. $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels.

Définition : On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un nombre entier non nul.