

I ensembles de nombres

1. les nombres entiers

définition

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... sont les **nombres entiers naturels**.

l'ensemble de ces nombres est noté **IN** (comme naturel) (ici on se déplace de 1 en 1)

ex 7 ? IN mais -7 ? IN et 3,8 ? IN.

définition

... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... sont les **nombres entiers relatifs**. (ils sont négatifs, positifs ou nuls)

l'ensemble de ces nombres est noté **Z** (comme zahl qui signifie nombre en allemand)

(ici on se déplace de -1 en -1 et de 1 en 1)

ex : 7 ? IN mais -7 ? IN et 3,8 ? IN

remarque : IN ? Z « IN est inclus dans Z » c'est à dire que tout entier naturel est un entier relatif.

2. les nombres rationnels

définition

les **nombres rationnels** sont les quotient $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul.

l'écriture $\frac{a}{b}$ est appelée **écriture fractionnaire**.

l'ensemble de ces nombres est noté **Q** (comme quotient)

remarque Z ? Q

en effet, soit a ? Z. on sait que $a = \frac{a}{1}$

comme 1 ? Z et 1 ? 0 alors $\frac{a}{1}$? Q

donc a ? Q

d'où si a ? Z alors a ? Q i.e Z ? Q

ex : 7 ? Q ; $\frac{5}{2}$? Q ; $\frac{1}{3}$? Q ; 3,8 ? Q car $3,8 = \frac{38}{10}$

remarque

un même nombre rationnel peut s'écrire sous forme fractionnaire d'une infinité de façons.

par exemple, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \frac{24}{18} = \dots\dots$

(car $\frac{a}{b} = \frac{ka}{ka}$ où a, b, k sont des entiers relatifs, b et k non nuls)

3. cas particuliers :les nombres décimaux

définition

les nombres qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de dix sont appelés **nombres décimaux** (décimal $\longleftrightarrow$ dix)

l'ensemble de ces nombres est noté **ID** (comme décimal)

remarques

$\longrightarrow$ ID ? Q

les décimaux sont des rationnels particuliers (10^p ? 0 et 10^p ? Z, p ? IN)

$\longrightarrow$ comme on divise un entier par une puissance de dix cela signifie que les décimaux sont des nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule

ex : $\frac{1385}{100} = 13,85$? ID 13 est la **partie entière** de 13,85
 0,85 est la **partie décimale** de 13,85

$\updownarrow$ $\updownarrow$
notation fractionnaire **notation décimale**

$-\frac{4}{1000} = -0,004$? ID 0 est la **partie entière** de -0,004
 -0,004 est la **partie décimale** de 0,004

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \text{ ? ID}$$

mais $\frac{1}{3}$? ID car on ne peut pas se ramener à une puissance de dix au dénominateur. de plus $\frac{1}{3} = 0,33333333\dots$ l'écriture décimale ne s'arrête pas.

critère pour reconnaître un nombre décimal sous forme fractionnaire.
 sous forme irréductible, le dénominateur n'est qu'un produit de 2 et/ou de 5.

propriété et définition

tout nombre décimal peut s'écrire $a \cdot 10^p$ ou $-a \cdot 10^p$ où a est un décimal tel que $1 \leq a < 10$ (i.e ayant un seul chiffre avant la virgule autre que 0) et p un entier relatif.

cette écriture est appelée **notation scientifique** du nombre.
 10^p est appelé **l'ordre de grandeur** du nombre.

remarque

cette écriture est souvent plus commode notamment pour comparer des nombres (il faut juste comparer les « a ») ; changer d'unité ; donner l'ordre de grandeur du résultat d'une opération.
 elle est très utile en physique-chimie.

ex : $2328423 = 2,328423 \cdot 10^6$
 sur la calculatrice 2.328423 E6
 E pour exposant E6 signifie 10^6

10^6 est l'ordre de grandeur de 2328423

$-0,00032 = -3,2 \cdot 10^{-4}$
 sur la calculatrice -3.2 E-4

10^{-4} est l'ordre de grandeur de -0,00032

4. les autres nombres

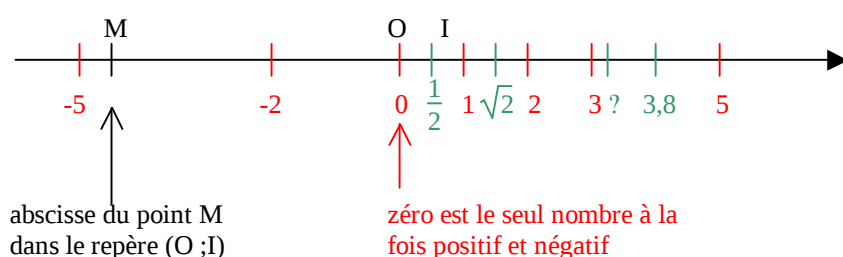
ils existent des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles que nous venons de voir.

on démontre par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$

ces nombres sont appelés **nombres irrationnels** (i.e « qui ne sont pas rationnels »)

ils appartiennent avec tous les nombres précédents à l'ensemble des **nombres réels** qui est noté **IR** (comme réel)

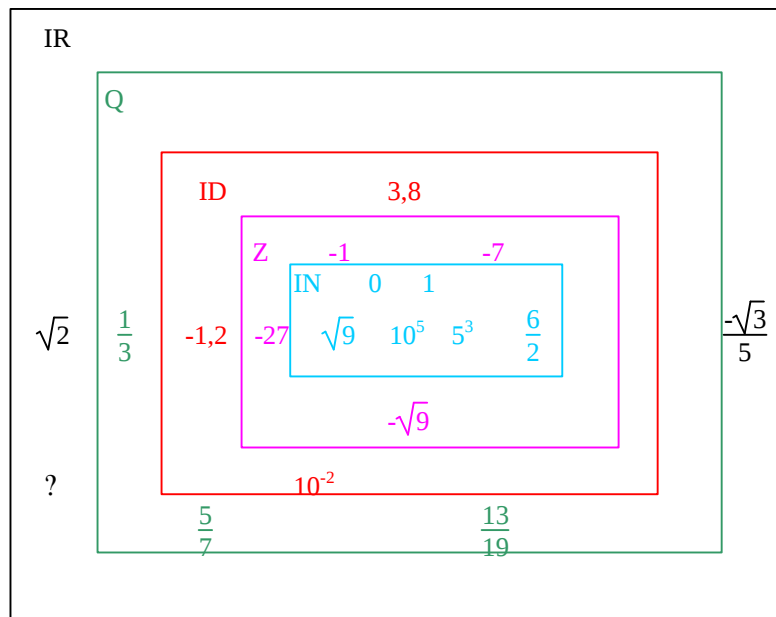
l'ensemble des **nombres réels** est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. (c'est à dire munie d'un repère (O ; I)). cette droite, qui représente alors IR est appelée **droite des réels** ou **droite numérique**.



récapitulatif

les différents ensembles de nombres sont emboîtés

on a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



remarques :

dans les exercices « soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit x ? $\mathbb{R}$ » ou « soit x un nombre réel »

le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro.
ainsi $\mathbb{R}^*$ désigne les réels non nuls.

le signe + - placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs **positifs**
ainsi $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro)
 $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

5. valeur approchée

définition

on appelle **valeur approchée** d'un nombre x à la **précision e** ou à **e près** tout nombre a tel que
 $a - e \leq x \leq a + e$

ex : 1,4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,01 près (10^{-1} près)

car $1,4 - 0,1 \leq \sqrt{2} \leq 1,4 + 0,1$

$1,4 = a$ $0,1 = e$ $\sqrt{2} = x$

II nombres premiers

1. diviseur d'un nombre entier naturel

définition

soit a ? $\mathbb{N}$, b ? $\mathbb{N}^*$

on dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \cdot b$

ex : $12 = 4 \cdot 3 = 1 \cdot 12 = 6 \cdot 2$

4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12

par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car $12 \neq 5 \cdot \mathbb{N}$

2. nombres premiers

définition

un nombre entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

ex : 12 n'est pas premier
5 est premier

les premiers nombres premiers :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ;

(voir crible d'Eratosthène cahier d'exercices)

remarques

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair

il y a un infini de nombre premier

3. décomposition en produit de facteurs premiers

théorème

tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers

ex : $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

4. critère de divisibilité

par 2 : le nombre se termine par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6, 8

par 3 : la somme des chiffres du nombre est divisible par 3

par 5 : le nombre se termine par 0 ou 5

par 9 : la somme des chiffres du nombre est divisible par 9

par 10 : le nombre est divisible par 2 et 5 c'est à dire il se termine par 0

5. application

a) simplifier les fractions

$$\frac{84}{60} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{5} \quad \longleftarrow \text{fraction irréductible}$$

b) simplifier les racines carrées

$$\begin{aligned} \sqrt{2100} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7} \\ &= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3 \times 7} \\ &= \sqrt{(2 \times 5)^2 \times 3 \times 7} \\ &= \sqrt{(2 \times 5)^2} \times \sqrt{3 \times 7} \\ &= 2 \times 5 \times \sqrt{3 \times 7} \\ &= 10\sqrt{21} \end{aligned}$$

c) calculer le PGCD de deux nombres entiers naturels

pgcd(36 ; 120) = ?

36		2
18		2
9		3
3		3
1		

120		2
60		2
30		2
15		3
5		5
		1

$$\text{pgcd} (36 ; 120) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$