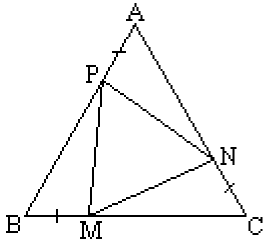
Exercices sur les triangles isométriques et semblables

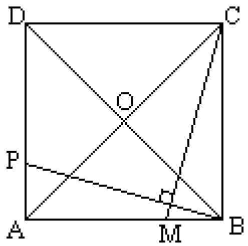
Exercice 1 : ABC est un triangle équilatéral, M, N, P sont des points de [BC], [CA], [AB] tels que BM = CN = AP.

1. Démontrer que les triangles BMP, CNM et NAP sont isométriques deux à deux.
2. En déduire que MNP est équilatéral.



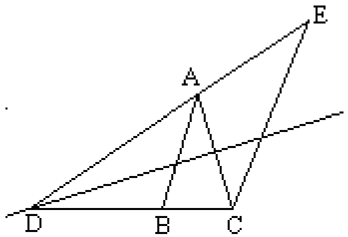
Exercice 2 : ABCD est un carré de centre O, M un point de [AB]. On mène par B la perpendiculaire à (CM) qui coupe (AD) en P.

1. a) Démontrer que $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.
   b) En déduire que les triangles MCB et ABP sont isométriques et que MB = AP.
2. a) Démontrer que les triangles OMB et OPA sont isométriques.
   b) En déduire que le triangle POM est rectangle et isocèle.



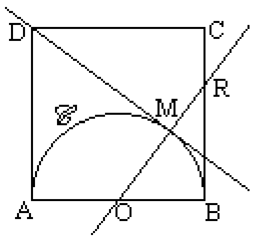
Exercice 3 : ABC est un triangle isocèle en A. La médiatrice de [AC] coupe la droite (BC) en D.
Le point E de la droite (AD) est tel que AE = BD.

1. Démontrer que les triangles ABD et ACE sont isométriques.
2. En déduire que le triangle CDE est isocèle.



Exercice 4 : ABCD est un carré, (DM) est tangente au cercle C de diamètre [AB].

1. Démontrer que les triangles OAD et OMD sont isométriques.
2. Démontrer que les triangles DMR et DCR sont isométriques. En déduire la nature du triangle CMR.

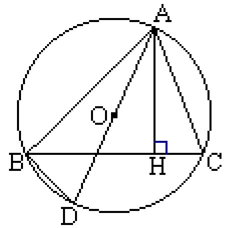


Exercice 5 : ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.

1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2. En déduire que DN × BM = AB × AD.

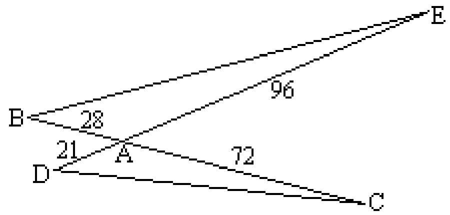
Exercice 6 : C est un cercle de centre O de rayon r, ABC est un triangle inscrit dans C tel que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. La droite (AO) recoupe C en D.

1. Démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables.
2. On pose AB = c, AC = b et AH = h.
   En déduire de la question précédente que $bc = 2rh$.



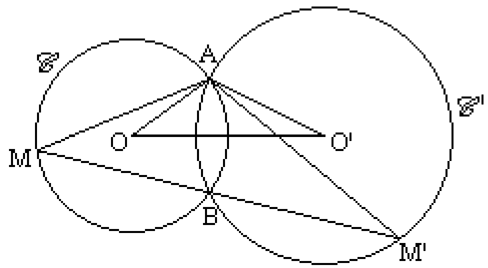
Exercice 7 :

1. Quel théorème permet de montrer que les triangles DAC et BAE ci-dessous sont semblables (les mesures sont en mm) ?
2. Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?



Exercice 8 : Deux cercles C et C' de centre O et O' se coupent en A et B. Une droite passant par B coupe, comme l'indique la figure ci-dessous, C en M et C' en M'.

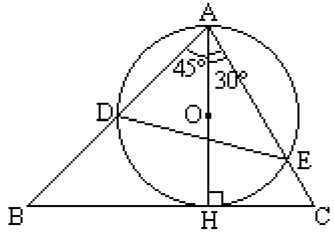
1. a) Démontrer que (OO') est la médiatrice de [AB].
   b) En déduire que $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$.
2. a) Démontrer que les triangles OAO' et MAM' sont des triangles semblables.
   b) En déduire que $\frac{AM}{AM'} = \frac{r}{r'}$, si r et r' sont les rayons respectifs de C et C'.



Exercice 9 : Dans un repère orthonormé, A, B, C, E, F, G sont les points dont voici les coordonnées :
A(-4 ;0) ; B(3 ;11) ; C(6 ;6) ; E(0 ;-5) ; F (1 ;-4) ; G(3 ;-6).

1. Démontrer que les triangles ABC et EFG sont de même forme.
2. Calculer l'aire de ABC.
3. Calculer de deux façons différentes l'aire de EFG.

Exercice 10 : Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur [BC], $\widehat{BAH} = 45°$, $\widehat{HAC} = 30°$ et AH = 6 cm. Le cercle C de diamètre [AH] et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.



1. a) Calculer AB et AC.
   b) Montrer que $AE = 3\sqrt{3}$ cm.
2. a) Démontrer que $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60°$.
   b) Démontrer que BAC et EAD sont semblables.
   c) En déduire que $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ est le rapport de réduction qui fait passer du triangle BAC au triangle EAD.
3. a) Calculer BC.
   b) En déduire que $DE = \dfrac{3}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm.
4. On note F le point diamétralement opposé à D sur C.
   a) Démontrer que $\widehat{DFE} = 75°$.
   b) En déduire que $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.