Classe : $2^{nde}3$ Le 29/09/2004

MATHEMATIQUES
DEVOIR N°6

Exercice 1 : (5,5 *points*)

ABC est un triangle, E, F, G sont définis par :

$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{FG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites (BE) et (FG)?

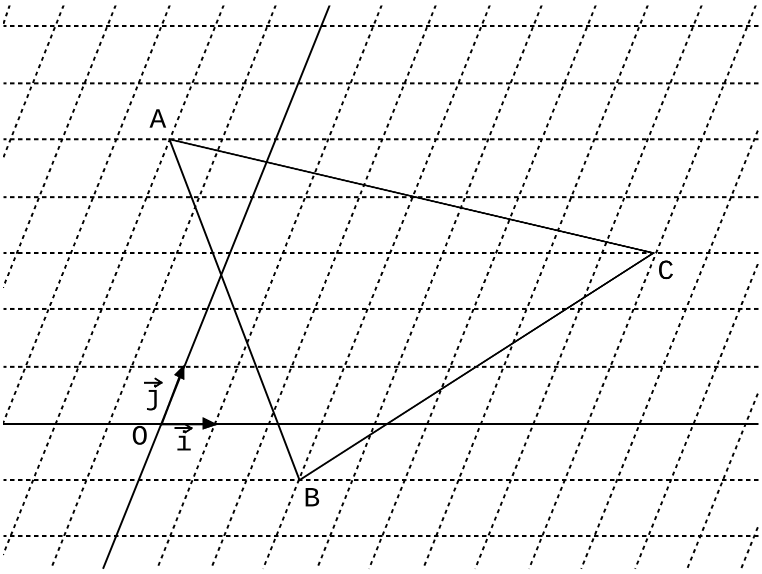
Exercice 2 : (6,5 *points*)

On a placé ci-contre trois points *A*, *B*, *C* dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Lire les coordonnées des points *A*, *B*, *C* et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Soit *M* tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
Calculer les coordonnées de *M*.

3. Soit *N* le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};7\right)$.
Quelle est la nature du quadrilatère *ABCN*?

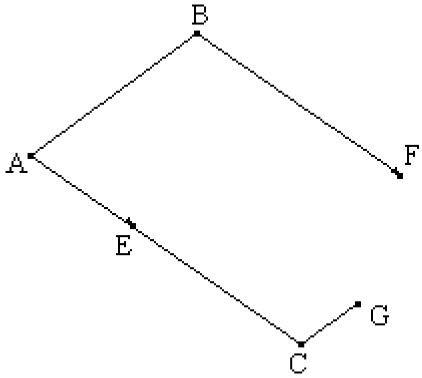


Exercice 3 : (8 *points*)
On considère les points *A*(-1;4), *B*(- 4;-2), *C*(1;0).
1. Calculer les coordonnées du point *D* de façon que *ABCD* soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point *M* intersection des diagonales de *ABCD*.
3. Soit *E*(6;2). Démontrer que *B*, *C* et *E* sont alignés.
4. Soit *F*(-7;4). Montrer que (*BF*) est parallèleà (*AC*).
5. Calculer les longueurs *AB, BC* et *AC*.
6. Le triangle *ABC* est-il rectangle?

<u>Correction du devoir 6</u>

<u>Exercice 1:</u>

1.



2. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ d'après la relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

4. or $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FG}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

<u>Exercice 2:</u>

1. On a : $A(-2 ; 5)$; $B(3 ; -1)$ et $C(8 ; 3)$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$

2. On a $M(x_M ; y_M)$ alors $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-x_B\\y_M-y_B\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-3\\y_M+1\end{pmatrix}$

de plus $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8-3\\3+1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ alors $\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5}\times 5\\\dfrac{3}{5}\times 4\end{pmatrix}$; $\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\\dfrac{12}{5}\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, on obtient $x_M-3=3$ c'est à dire $x_M=6$

et $y_M+1=\dfrac{12}{5}$ c'est à dire $y_M=\dfrac{7}{5}$. Donc $M\left(6 ; \dfrac{7}{5}\right)$.

3. Soit $N\left(\dfrac{1}{2} ; 7\right)$ Montrons que *ABCN* est un trapèze de bases [*AN*] et [*BC*]

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}+2\\7-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AN}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires, donc les droites (*BC*) et (*AN*) sont parallèles et le quadrilatère *ABCN* est un trapèze.

<u>Exercice 3:</u> $A(-1 ; 4)$; $B(-4 ; -2)$; $C(1 ; 0)$

1. *ABCD* est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4+1\\-2-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-y_D\end{pmatrix}$ d'où $1-x_D=-3$ c'est à dire $x_D=4$

$-y_D=-6$ c'est à dire $y_D=6$ donc $D(4 ; 6)$.

2. *M* est l'intersection des diagonales de *ABCD*, c'est donc le milieu de [*AC*].

On a alors : $x_M=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$; $y_M=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2$ Donc $M(0 ; 2)$

3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1+4\\0+2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}6+4\\2+2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$

les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc les points *B*, *E* et *C* sont alignés.

4. $F(-7 ; 4)$; $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-7+4\\4+2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+1\\0-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

or $xy'-x'y=-3\times(-4)-2\times6=12-12=0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les droites (*BF*) et (*AC*) sont parallèles.

5. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4+1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{(1+1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{(1+4)^2+(0+2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

6. Si le triangle *ABC* est rectangle, alors son hypoténuse est [*AB*]

or $AB^2=45$ et $AC^2+BC^2=20+29=49$ alors $AB^2\neq AC^2+BC^2$

d'après le théorème de Pythagore, le triangle *ABC* n'est pas rectangle.